

Chapter 3: Discrete-time Markov Chain.

1. Definition

- A discrete space stochastic process is a MC if:

$$P(X_{n+1}=j \mid X_n=i, X_{n-1}, \dots, X_0) = P(X_{n+1}=j \mid X_n=i).$$

- When $P(X_{n+1}=j \mid X_n=i)$ does not depend on n . $\Rightarrow$ Stationary / Homogeneous MC

= Transition Rule does not change over time.

- Transition probability matrix, $P = (P_{ij})$.

$$P_{ij} = P(X_{n+1}=j \mid X_n=i).$$

$$\text{Properties: } P_{ij} \geq 0, \sum_{j \in S} P_{ij} = 1 \quad (\text{Each Row } \Sigma = 1).$$

$$\text{Absorbing State: } P(X_{n+k}=i \mid X_n=i) = 1$$

2. Properties.

$$P(X_n=i_n, \dots, X_1=i_1, X_0=i_0) = P(X_0=i_0) \cdot P_{i_0 i_1} \cdot P_{i_1 i_2} \dots$$

$$P(X_{n+1}=j) = \sum_i \underbrace{P(X_{n+1}=j \mid X_n=i)}_{P_{ij}} \underbrace{P(X_n=i)}_{p_i}$$

3. Chapman - Kolmogorov Equations.

How to calculate $P_{ij}^{(n)} := P(X_n=j \mid X_0=i)$? multi-step transition prob.

$$P(X_n=j \mid X_0=i) = \sum_k P(X_n=j, X_m=k \mid X_0=i).$$

$$= \sum_k P(X_m=k \mid X_0=i) \cdot P(X_n=j \mid X_m=k, X_0=i).$$

$$= \sum_k P(X_m=k \mid X_0=i) \cdot P(X_n=j \mid X_m=k)$$

$$= \sum_k P_{ik}^{(m)} \cdot P_{kj}^{(n-m)}$$

$$\Rightarrow p^{(n)} = p^{(m)} \cdot p^{(n-m)}.$$

4. Hitting Probability.

m step 之内, system 至少进入 1 次 区域 A 的概率.

引入 Recorder. 把 A 变成 Absorbing state 中.

e.g. Given Gary is glum today, calculate the prob. that he is ever cheerful on one of the next four days.

	C	S	G
C	0.5	0.4	0.1
S	0.3	0.4	0.3
G	0.2	0.3	0.5

"Cheerful" is the absorbing state. so the transition matrix is

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix} \rightarrow \tilde{P}^4 = \tilde{P} \cdot \tilde{P} \cdot \tilde{P} \cdot \tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{7083}{10000} & \frac{67}{5000} & \frac{1193}{10000} \\ \frac{3261}{5000} & \frac{1193}{10000} & \frac{377}{2000} \end{pmatrix}$$

$$\text{So } \mathbb{P}(\tilde{X}_4 = 1 \mid \tilde{X}_0 = 6) = \frac{3261}{5000} \approx 0.6522.$$

5. Classification of States.

Accessibility: $P_{ij}^{(n)} > 0$ for $n \geq 0$.

Communication: $i \leftrightarrow j$ iff $i \rightarrow j$ & $j \rightarrow i$

① 常返态 (Recurrent) and 瞬态 (Transient) States.

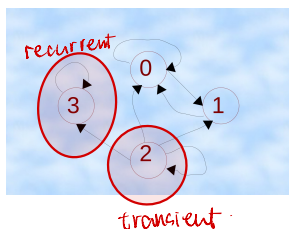
The first hitting time of state i : $\sigma_i = \inf \{n \geq 1 : X_n = i\}$. 即使初始在 i , 第一次则从初次返回.

$$\{\sigma_i = n\} = \{X_n = i, X_{n-1} \neq i, \dots, X_1 \neq i\}$$

Starting from state i , the prob. that return to i :

$$f_i = \mathbb{P}(\sigma_i < \infty \mid X_0 = i) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\sigma_i = n \mid X_0 = i)$$

$\begin{cases} f_i = 1 & \text{state } i \text{ is recurrent} \\ f_i < 1 & \text{transient.} \end{cases}$



Assume i and j are in the same com. class:

$\Rightarrow i$ recurrent $\Rightarrow j$ recurrent

i transient $\Rightarrow j$ transient.

总结: 判断 Recurrence / Transience:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{ss}^{(n)} = \infty \quad \text{OR} \quad f_s = 1 \quad \Rightarrow \text{Recurrent}$$

Others $\Rightarrow$ Transient.

e.g.

Example 4.5 (A Random Walk Model)

A Markov chain whose state space is given by the integers $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ is said to be a random walk if, for some $p \in (0, 1)$,

$$P_{i,i+1} = p = 1 - P_{i,i-1}, \quad i = 0, \pm 1, \dots$$

For a state s , is it recurrent or transient?

since $i \leftrightarrow j$. so all state is a communicate class.

$\Rightarrow$ only study on one point. say 0.

if n is odd, $P_{00}^{(n)} = 0$, $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P_{00}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} P_{00}^{(2n)}$

Therefore, $P_{00}^{(2n)} = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n \quad (n \in \mathbb{N}, n \neq 0).$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{00}^{(2n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!} p^n (1-p)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{n} \sqrt{\pi}}$$

by stirling's formula.

So, need to prove $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{n} \sqrt{\pi}} = \infty$.

When $p \neq \frac{1}{2}$, $z = 4p(1-p) < 1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{n} \sqrt{\pi}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{z}{1-z} < \infty$$

when $p = \frac{1}{2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{n} \sqrt{\pi}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \sqrt{\pi}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} \Big|_1^{\infty} = \infty$$

已常返

零常返.

② Positive or Null Recurrent.

预期返回时间. Expected Return Time.

$$\{\tau_s = n\} = \{X_0 = s, X_n = s, X_k \neq s \text{ for all } k=1, \dots, n-1\}.$$

$$m_s = E[\tau_s]$$

Recurrent state	$m_s = \infty$	Null recurrent
	$m_s < \infty$	Positive recurrent
Transient state.	$m_s = \infty$	

不可约

③ Irreducible Markov Chain.

$\Rightarrow$ state space 只包含一个沟通类. $\Leftrightarrow$ 所有状态互通.

Finite - state Irreducible Markov Chain

$\Rightarrow$ all states are Positive Recurrent.

若 Irreducible Markov Chain, starting from any initial state. the long-run proportion of time spent in state s is: $\pi_{hs} = \frac{1}{m_s}$

6. Long-run Proportion.

① Stationary Distribution.

For an irreducible MC, $\pi = (\pi_s)_{s \in S}$: long-run proportion of each state.

Then $\pi = \pi P$.

A prob. distribution $\mu = (\mu_0, \mu_1, \dots)$ is invariant / stationary, if

$$\mu = \mu P \quad \text{and} \quad \sum_s \mu_s = 1$$

1. 统计稳态 vs 样本路径

这是初学者最容易混淆的地方。

- 样本路径 (Sample Path) 是动荡的: 如果你观察一个具体的随机过程 (比如一个具体的网页浏览者), 他会不断地从网页 A 跳到网页 B。
- 分布 (Distribution) 是静止的: 如果你观察全网成千上万个浏览者, 虽然每个人都在动, 但你会发现“待在网页 A 的总人数比例”始终维持在 15%, 不再波动。

π_i : long-run proportion.

μ_i : stationary distribution

m_i : mean recurrence time.

Properties:

An irreducible MC exists at most 1 stationary distribution.

(satisfy $\mu = \mu P$ & $\sum_s \mu_s = 1$)

if a stationary distribution exists, each $i \in S$, $\pi_i = \mu_i > 0$.

由于 $\mu_s = \frac{1}{m_s}$, $m_s < \infty$
 $\Rightarrow$ 均正有限.

no, all states null recurrent / transient.

Example 4.24 (Up-Down Analysis via MC)

Suppose a production process evolves as an irreducible, positive recurrent DTMC with transition probabilities P_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$. Some states are acceptable and the rest are unacceptable. Let A be the set of acceptable states and A^c its complement. The process is called up when in A and down when in A^c . Determine:

1. the rate at which the process goes from up to down (breakdown rate);
2. the average length of a down period;
3. the average length of an up period.

eg.

1. Rate (Up $\rightarrow$ Down) = $\sum_{i \in A} \sum_{j \in A^c} \pi_i P_{ij}$ ↑ 离开 Up 转到 Down

2. $E[T_{\text{down}}] = \frac{\text{系统处于 Down 的总时间占比}}{\text{进入 Down 的频率}} = \frac{\sum_{j \in A^c} \pi_j}{\sum_{i \in A} \sum_{j \in A^c} \pi_i P_{ij}}$

3. $E[T_{\text{up}}] = \frac{\text{系统处于 Up 的总时间占比}}{\text{进入 Up 的频率}} = \frac{\sum_{i \in A} \pi_i}{\sum_{j \in A^c} \sum_{i \in A} \pi_j P_{ji}}$

② Limiting Probability

考虑一个转移矩阵为 P 的马尔可夫链。固定初始状态 $s \in S$ 。假设极限 $P_{st}^{(\infty)} := \lim_{n \rightarrow \infty} P_{st}^{(n)}$ 对所有 $t \in S$ 均存在。那么 $P_{st}^{(\infty)}$ 也就是访问状态 t 的（期望）长期比例。

1. 长期比例 (π) vs. 极限概率 ($P^{(\infty)}$)

- **长期比例 (Cesàro Mean)**: 就像是在算平均分。即便你考试成绩一会儿 0 分一会儿 100 分 (比如周期性震荡), 只要平均分稳定, 长期比例就存在。
- **极限概率**: 就像是要求你最后的成绩必须稳定在某个分数上。它要求更高。

$$P_{st}^{(\infty)} = s_n + y_{n+1} \\ = \binom{j}{k} (1-p)^k p^{j-k} + \frac{e^{-\lambda} \lambda^{j-k}}{(j-k)!}$$

2. 为什么需要这个假设?

讲义里提到“假设极限存在”。为什么要假设? 因为**并不是所有的平稳分布都能达到极限概率**。

反例: 周期性 (Periodicity)

还记得我们的 Example 1 吗? $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 。

- 它的长期比例 $\pi = (0.5, 0.5)$ 是存在的。
- 但它的极限概率 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{00}^{(n)}$ **不存在!** 因为它在 0 和 1 之间永远跳变。
- 物理直觉: 如果你在第 1,000,000 步看它, 它可能在状态 0; 但第 1,000,001 步, 它一定在状态 1。它永远不会“安分”地待在一个概率上。

周期 (Period) 的定义

状态 s 的周期 d 定义为:

$$d = \gcd\{n \geq 1 : P_{ss}^n > 0\}$$

也就是说, 周期 d 是所有能让系统返回状态 s 的步数 n 的**最大公约数**。

- 如果周期 $d = 1$, 则称该状态为**非周期 (Aperiodic)** 的。 

定理 (无需证明)

1. **同类同性**: 同一沟通类中的所有状态具有相同的周期。
2. **收敛条件**: 对于任何**非周期且不可约**的马尔可夫链, 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{st}^{(n)}$ 对所有 t 始终存在。
3. **判定小技巧**: 对于不可约链, 如果存在某个状态 s 满足 $P_{ss} > 0$ (即有自环), 那么该链必定是非周期的。
4. **术语 (Ergodic)**: 如果一个马尔可夫链是**不可约、非周期且正常返**的, 则称其为**遍历的 (Ergodic)**。

③ Time Reversible MC

Q_{ts} 代表: 长期来看, 进入状态 t 的流量中, 有多少比例是来自状态 s 的。

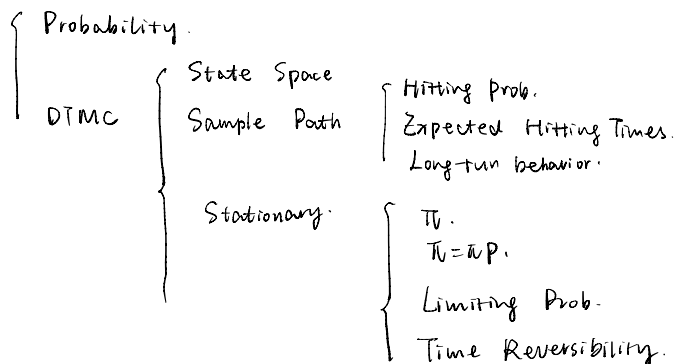
- **正向看 (P)**: 我现在在 s , 下一步去 t 的概率是多少?
- **反向看 (Q)**: 我现在在 t , 回过头看, 上一步我从 s 来的概率是多少?

在平稳状态下, 正向流动的概率质量必须等于反向流动的概率质量:

$$\pi_s P_{st} = \pi_t Q_{ts}$$

直觉理解: 从 s 到 t 的总流量 (左边) = 从 t 回溯到 s 的总流量 (右边)。

Midterm Review



DTMC.

1. Markovian & multi-step Transition

C-K Equation: $P^{(n)} = P^n$

Hitting Probability: Recorder Trick

2. State.

Communication: $i \leftrightarrow j$.

Recurrent: $f_i = 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \infty$

Transient: $f_i < 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} < \infty$

Irreducible: 只有一个 Communication Class (所有状态互相可达)

* finite state + irreducible $\rightarrow$ positive recurrent.

3. Stationary & Limiting Distribution

① Stationary Distribution $\pi = \pi P$ $\sum \pi_i = 1$

* Irreducible + Positive Recurrent $\rightarrow$ Stationary Distribution exists.

② Limiting Prob. $n \rightarrow \infty$ $P_{ij} \rightarrow \pi_j$?

irreducible + aperiodic.

马尔可夫链

4. Time Reversible MC.

if $\pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji}$, $\sum \pi_i = 1$. $\Rightarrow \pi$ stationary distribution.

5. Transient Analysis.

$P_T \rightarrow S = (I - P_T)^{-1}$. S_{ij} = i出发, 被吸收前在j停留的平均步数.

① 吸收态停留时间. (从i出发至被吸收, $\sum_{j \in T} S_{ij}$.)

② 命中其他吸收态: $f_{ij} = \frac{S_{ij} - 1_{i=j}}{S_{jj}}$ ③ $\sum S_{ij} \cdot \text{Cost}_j = \text{Cost}_i$.

Chapter 4: CTMC

1. Definition

Continuous-Time Markov Chain (CTMC)

Suppose $\{X_t, t \geq 0\}$ is a continuous-time stochastic process taking values in $S \subseteq \mathbb{Z}$. The process is called a **continuous-time Markov chain** if for all $s, t \geq 0$ and all $i, j \in S$,

$$\mathbb{P}(X_{t+s} = j \mid X_s = i, \{X_u : 0 \leq u < s\}) = \mathbb{P}(X_{t+s} = j \mid X_s = i).$$

If, in addition,

$$\mathbb{P}(X_{t+s} = j \mid X_s = i) = \mathbb{P}(X_t = j \mid X_0 = i), \quad \forall s, t \geq 0,$$

the CTMC is said to be **time-homogeneous**.

① Holding Time.

The holding time of each state is **exponentially distributed**.

② 一个离散的 CTMC 由以下要求定义:

holding rate $v_i > 0$

Jump Matrix J , $J_{ij} = \mathbb{P}(\text{next state is } j \mid \text{a jump occur from } i)$.

↳ Properties: $J_{ii} = 0$, $\sum_{j \in S} J_{ij} = 1$.

Connection to DTMC:

① S_n : 第 n 次状态跃迁的时间.

$\{Y_n\}$. 离散 $\Rightarrow$ Embedded Chain.

$Y_n := S_n$: 跳跃后的瞬间状态.

↳ 以 J 为 Jump Matrix 的 DTMC.

DTMC $\rightarrow$ CTMC: 已知 Y_n , 从 J 中抽出 Y_{n+1} , 再从 $\text{Exponential}(v_i)$ 抽取停留时间 $S_{n+1} - t$.

② 方案 2: 基于竞争触发器的并行构造 (An Alternative Construction)

这种方法更贴近异步并发的物理现实。

• 利用指数分布的性质: 多个独立指数分布变量的最小值, 仍是指数分布, 且对应的速率是各自速率之和。①

• 系统视角: 假设当前在状态 i , 对于每一个可能的去向 j , 系统都在后台启动一个独立的“触发器”(定时器), 其倒计时时长服从指数分布 $\tau_{ij} \sim \text{Exponential}(\nu_i J_{ij})$ 。① +1

• 所有触发器并行运行。哪一个触发器最先到期 (即时间最短), 就决定了跳跃的发生时间以及目的状态。① +2

• 这种逻辑可以直接转化为状态转移图 (Transition Rate Diagram): 图中的节点是状态, 箭头标注的是具体路径的转移速率 $\nu_{ij} := \nu_i J_{ij}$, 而离开状态的总速率 ν_i 等于所有流出箭头的速率之和。① +1

CTMC.

1. 定义:

$$P(X_{t+s} = j \mid X_s = i, \{X_u: 0 \leq u < s\}) = P(X_{t+s} = j \mid X_s = i).$$

$$\text{If } P(X_{t+s} = j \mid X_s = i) = P(X_t = j \mid X_0 = i), \quad \forall s, t > 0 \Rightarrow \text{time-homogeneous.}$$

Holding time: 在状态 i 停留的时间. $E(H_i) = \frac{1}{V_i}$

• Exponentially Distributed. (因在某状态停留多久与之前无关 $\rightarrow$ Memoryless!)

CTMC 由 Holding Rate + Jump Matrix 定义.

• Holding Rate $V_i > 0$

• Jumping Matrix $J = (J_{ij})$, $J_{ij} := P(\text{next state } j \mid \text{jump from } i)$,

$$\Rightarrow J_{ii} = 0, \quad J_{ij} \geq 0, \quad \sum_j J_{ij} = 1$$

Embedded Chain: 不看时间. 定义 Jump time S_n , 每次跳后的状态是 $Y_n = X_{S_n}$

$\{Y_n\}$ 是 Embedded Chain. CTMC with Transition Matrix = J .

Competing Triggers: state i 出发. 对所有可能的 $j \neq i$, 设独立时钟. $\tau_{ij} \sim \text{Exponential}(V_i J_{ij})$.

最先响应的钟决定了 $\left\{ \begin{array}{l} \text{停留时间} \\ \text{跳到哪个状态} \end{array} \right.$ 独立 即每一条 $i \rightarrow j$ 都有触发器. $V_{ij} = V_i J_{ij}$. 最先响应的边.

Transition Rate Diagram: Node 代表 State. $i \rightarrow j$ 边上标注 transition rate $V_{ij} = V_i J_{ij}$

$$\Rightarrow \text{total rate out of state } i = \sum_j V_{ij} = V_i$$

假设状态 i 的 n 条边 rate 分别为 q_{ij} :

$$\bullet \text{ holding rate } V_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}$$

$$\bullet \text{ Jump Probability } J_{ij} = \frac{q_{ij}}{V_i}$$

Variant of Example 5.8

You arrive when n clerks are busy but no one is waiting. You start service when any clerk becomes free. Service times for clerk i are exponential with rate λ_i . Find $E[T]$, where T is your total time in the post office.

$$T = \underbrace{W}_{\text{wait}} + \underbrace{S}_{\text{service}}$$

$$\sum_i P(W \rightarrow S_i \rightarrow F) E[W \rightarrow S_i \rightarrow F] = \sum_i \frac{\lambda_i}{\sum_j \lambda_j} \left[\frac{1}{\sum_j \lambda_j} + \frac{1}{\lambda_i} \right] = \frac{n+1}{\sum_j \lambda_j}.$$

eg. 1 个 clerk, 1 次服务 1 个人. 每个人服务时间独立. 满足 $\text{Exp}(\lambda)$

每个等待的人耐 m 时间为 $\text{Exp}(\theta)$. 耐时耗尽 $\rightarrow$ 离开.

假设已有 n 人已被服务. 队伍中第 n 个人:

(a) $P_n = P(\text{第 } n \text{ 位顾客最终被服务})$.

(b) $W_n = E(\text{她的等待时间} \mid \text{她最终被服务})$.

思路: 分析每一号可能发什么?

$\left\{ \begin{array}{l} \text{已在服务的人集} \\ \text{前 } k-1 \text{ 人有人耐} \\ \text{她耐} \end{array} \right. \begin{array}{l} K \\ (K-1)\theta \\ 0 \end{array}$

$\Rightarrow$ 总速率 $\mu + \theta$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{前进} \\ \text{耐} \end{array} \right. \begin{array}{l} \frac{K+1-\theta}{K+\theta} \\ \frac{0}{K+\theta} \end{array} \Rightarrow P_n = \prod_{i=1}^n \frac{K+1-\theta}{K+\theta}.$$

一组 RV: $\{X_1, \dots, X_n\}$ 是相互独立的

指数分布 (40 对时钟)

• 停留时间 $H = \min(X_1, \dots, X_n)$

• 下状态 j : 哪个 X_i 到最小值

给定当前状态 $X_t = i$.

$\Rightarrow H_i$ 与 F -跳到哪 k 独立.

$T = \text{等待} + \text{服务}$

$$= \sum \frac{\lambda_i}{\sum \lambda_i} \left(\frac{1}{\sum \lambda_i} + \frac{1}{\lambda_i} \right)$$

$$= \frac{1}{\sum \lambda_i} + \frac{n}{\sum \lambda_i} = \frac{n+1}{\sum \lambda_i}$$

当地前面有 k 个人 T 一次事件发生 $\sim \text{Exp}(\mu + k\theta)$ $E(T_k) = \frac{1}{\mu + k\theta}$

从 $n \rightarrow 0$ $W_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu + k\theta}$

(a) 假设当前她前方有 k 个人.

① 前面减少 1 个人. $\left\{ \begin{array}{l} \text{当前被服务的人完成了: rate} = \mu. \\ \text{队伍前方有人离开: rate} = (k-1)\theta. \end{array} \right.$

$\Rightarrow$ 前方少 1 人 $\text{rate} = \mu + (k-1)\theta$.

② 她离开 $\text{rate} = \theta$.

$\Rightarrow$ 总 $\text{rate} = \mu + k\theta$. $\left\{ \begin{array}{l} \text{Prob(前方少 1 人)} = \frac{\mu + (k-1)\theta}{\mu + k\theta} \\ \text{Prob(她离开)} = \frac{\theta}{\mu + k\theta} \end{array} \right.$

$P_k = \frac{\mu + (k-1)\theta}{\mu + k\theta} \cdot P_{k-1} + \frac{\theta}{\mu + k\theta} \cdot 0 = \frac{\mu + (k-1)\theta}{\mu + k\theta} P_{k-1}$.

$\Rightarrow P_n = \frac{\mu + (n-1)\theta}{\mu + n\theta} \cdot \frac{\mu + (n-2)\theta}{\mu + (n-1)\theta} \cdot \dots \cdot \frac{\mu + \theta}{\mu + 2\theta} \cdot \frac{\mu}{\mu + \theta} P_0$ with $P_0 = 1$
 $= \frac{\mu}{\mu + n\theta}$

(b). By (a). 下一个事件发生的 rate 是 $\mu + k\theta$.

CTMC 是多个独立时钟竞争. $\Rightarrow$ 下一个事件发生的时间 $\sim \text{Exp}(\mu + k\theta)$.

$E(\text{下次事件发生需经过的时间}) = \frac{1}{\mu + k\theta}$

总时间 = 各阶段经历的时间和.

$\Rightarrow W_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu + k\theta}$

2. Poisson Process (特殊的 CTMC) 常速率的纯 birth 过程.

类似一个计数器. 发生 1 个事件 $\rightarrow$ 计数 + 1. 每次发生之前等待时间. iid $\text{Exp}(\lambda)$.

$\Rightarrow V_i = \lambda$ for all i , $J_{i,i+1} = 1$ for all i .

假设把时间轴切割成许多小段. 每段长度为 h .

在每一段内. 发生 1 个事件的 Prob. $\frac{P(N_{t+h} - N_t = 1)}{\lambda h + o(h)}$ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$. $o(h)$ 是下小量误差.
 发生至少 2 个事件 Prob. $o(h)$.
 什么都不发生 $1 - \lambda h + o(h)$.

且每段相互独立.

性质: (N_t : 从时间 0 到时间 t 发生的事件总数)

- 定义 $\Delta_t = N_{t+s} - N_s$, Δ_t 依然是 rate λ 的 Poisson Process.
- $\{N_t, t \geq 0\}$ 是一个 rate λ 的 Poisson Process, 即 λ 在任意时长为 t 的区间发生的事件个数 $N_t \sim \text{Poisson}(\lambda t)$ $P(N_t = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$ $E(S_n) = \frac{n}{\lambda}$
- T_n 是第 $n-1$ 收到第 n 次的时间间隔. $T_1, \dots, T_n, \dots \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Exp}(\lambda) \Rightarrow$ 第 n 次到达时间 $S_n = T_1 + \dots + T_n \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$
- 给定 $N_t = n$, $S_1, \dots, S_n$ 的分布 = n i.i.d Uniform $[0, t]$ 不平等的顺序统计量
 $\Rightarrow N_s | N_t \sim \text{Binomial}(n, s/t)$

e.g. $\{N_t, t \geq 0\}$ is a Poisson Process with rate λ . S_n denote the arrival time of the n -th event.

(a) $E[S_{m+2} | N_1 = 2]$, $m \geq 1$

(b) $E[N_{t+s} - N_{t-s} | N_t = m]$, where $t, s \in (0, t)$

Sol: (a) Since $N_1 = 2 \Rightarrow$ at time 1, we still need m events.

$$E[S_{m+2}] = 1 + m E[T_i] = 1 + \frac{m}{\lambda}$$

(b) $E[N_{t+s} - N_{t-s} | N_t = m]$ $\xrightarrow{\quad} N_{t+s} - N_t \sim \text{Poisson}(\lambda s)$

$$= \underbrace{E[N_{t+s} - N_t | N_t = m]}_{\lambda s} + \underbrace{E[N_t - N_{t-s} | N_t = m]}_{\lambda t} \quad \begin{matrix} N_t = 1: S_1, \dots, S_n \sim \text{Uniform}(0, 1) \\ \Rightarrow N_t - N_{t-s} \sim \text{Binomial}(m, s) \end{matrix}$$

Supervision. 叠加.

若 $N_i(t)$ 独立, 且 $N_i(t) \sim \text{Poisson process with rate } \lambda_i$

$\Rightarrow N(t) = \sum_i N_i(t)$ 是 rate $\sum \lambda_i$ 的 Poisson Process.

Thinning / Decomposition. 删选.

若 $N(t)$ 是 rate λ 的 Poisson Process. 每个到达独立以概率 p_i 被标记为 type i .

则各类型过程 $N_i(t)$ 独立, 且 $N_i(t)$ 是 rate λp_i 的 Poisson Process

2. Non-homogeneous Poisson Process (NHPP)

到达率由 Poisson 的 常量 λ 变为 $\lambda(t)$. 强度函数 intensity function

在小区间里 $P(N_{t+h} - N_t = 1) = \lambda(t) + o(h)$

对任意区间 $(s, s+t)$: $N(s+t) - N(s) \sim \text{Poisson} \left(\int_s^{s+t} \lambda(u) du \right)$ $\nearrow \lambda(s)$

$$P(N(s+t) - N(s) = k) = \frac{e^{-\lambda t} \lambda^k}{k!}$$

均值 = 函数下面积 $\Rightarrow$ 齐次为 λt

非齐次为 $\int \lambda(u) du$

① 时间依赖时的 Thinning.

如果原始到达率是 λ . 在 time s 到达的事件被分到 type i 的概率为 $P_i(s)$.

$\Rightarrow$ 则第 i 类的过程是 NHPP, intensity function $\lambda P_i(t)$.

② Conditional Arrival Time.

已知 $N(t) = n$. 那么 n 个 arrival time $s_1, \dots, s_n$ 等价于来自 pdf: $f(x) = \frac{\lambda(x)}{\int_0^t \lambda(s) ds}$ 的 iid 顺序 rv.

4. Compound Poisson Process 复合泊松过程.

$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$, 其中 $N(t)$ 是 rate λ 的 Poisson Process, $\{Y_i\}$ iid 且独立于 N .

$$\Rightarrow E(X(t)) = \lambda t \cdot E(Y_1)$$

$$\text{Var}(X(t)) = \lambda t \cdot E(Y_1^2)$$

ex. 家庭按 rate $\lambda = 2$ / week 到达. size $Y \in \{1, 2, 3, 4\}$, 概率为 $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$. 求五周内的移民总人数的 μ, σ^2 .

Number of family $N \sim \text{Poisson}(\lambda T) = \text{Poisson}(10)$

$$X = \sum_{i=1}^N Y_i \quad E(Y) = \frac{5}{2} \quad E(Y^2) = \frac{43}{6}$$

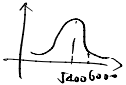
$$\text{then } E(X) = \lambda T E(Y) = 10 \cdot \frac{5}{2} = 25$$

$$\text{Var}(X) = \lambda T E(Y^2) = 10 \cdot \frac{43}{6} = \frac{215}{3}$$

ex. 每次取款额 X_i $E(X) = 30$ $\text{Var}(X) = 2500$ $E(X^2) = \text{Var}(X) + (E(X))^2 = 3400$.

每天总人次 Y_i $Y \sim \text{Poisson}(\lambda t) = \text{Poisson}(180)$.

$$\text{总取款额 } N = \sum_{i=1}^Y X_i$$



$$\Rightarrow E(N) = \lambda t E(X) = 5400 \quad \text{Var}(N) = \lambda t E(X^2) = 612000$$

$$P(N < 6000) = \Phi\left(\frac{6000 - 5400}{\sqrt{612000}}\right)$$

5. General CTMC.

一般的 CTMC 与 Poisson 不同.

可能从 1 个状态跳到多个不同状态.
rate 依赖于当前状态.
跳跃方向多样.

1. 时间相关行为

- ① $M(t) = f(X_t)$ 如何随时间演化.
- ② 长期行为是什么
- ③ 如何评估系统性能

法一: 无穷小分析. infinitesimal analysis.

eg. 生死过程: $\mu_n = n\mu$, $\lambda_n = n\lambda + \theta$.
 death rate birth rate immigration.

设 $X(0) = i$, $M(t) = E(X(t) | X(0) = i)$, 求 $M(t)$.

解: 在很短时间 Δt 内: 设当前有 n 个个体.

出生/移民 rate = $n\lambda + \theta$.

死亡 rate = $n\mu$.

$\Rightarrow$ 瞬时变化 rate = $n\lambda + \theta - n\mu$.

$\Rightarrow M'(t) = (\lambda - \mu)M(t) + \theta$. 解 ODE.

Kolmogorov's Forward Equation. (从当前状态向前推).

设 $P_{ij}(t) = P(X(t) = j | X(0) = i)$. 在合适条件下, (all finite state CTMC, 生死过程).

有: $P'(t) = P(t)Q$. (分量形式: $P'_{ij}(t) = \sum_k P_{ik}(t) Q_{kj}$.)

其中 $Q_{ii} = -V_i$, $Q_{ij} = V_i J_{ij}$ (Q : Generator Matrix, 描述转移率)

Kolmogorov's Backward Equation (从起点/初态向后推) $\rightarrow \sum_j Q_{ij} = 0$ (行之和为0).

$P'(t) = QP(t)$.

$P'_{ij}(t) = \sum_k Q_{ik} P_{kj}(t)$.

with $Q_{ii} = -V_i$, $Q_{ij} = V_i J_{ij}$

eg. 机器工作 $\exp(\lambda)$ 时间后故障, 修复 $\exp(\mu)$ 时间后再工作. 状态 0 = 工作, 状态 1 = 坏. $X(0) = 0$, 求 $P(X(t) = 0)$

$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$ 求 $P(X(t) = 0) \Rightarrow P_0 P_{00}(t)$.

用 backward eq. $P'_{ij}(t) = \sum_k Q_{ik} P_{kj}(t)$ 关注 $j=0 \Rightarrow$ 固定.

$$\begin{cases} P'_{00}(t) = Q_{00} P_{00}(t) + Q_{01} P_{10}(t) = -\lambda P_{00}(t) + \lambda P_{10}(t) \\ P'_{10}(t) = Q_{10} P_{00}(t) + Q_{11} P_{10}(t) = \mu P_{00}(t) + (-\mu) P_{10}(t) \end{cases}$$

整理得 $\mu P_{00}(t) + \lambda P'_{10}(t) = 0 \Rightarrow \mu P_{00}(t) + \lambda P_{10}(t) = C$.
 Since $t=0$ $P_{00}(0) = 1$ $P_{10}(0) = 0 \Rightarrow \mu P_{00}(0) + \lambda P_{10}(0) = \mu$

代回消元解 ODE

用 forward eq. $P'_{ij}(t) = \sum_k P_{ik}(t) Q_{kj}$

固定 $j=0$

$i=0$ $j=0$ $P'_{00}(t) = P_{00}(t) Q_{00} + P_{01}(t) Q_{00} = -\lambda P_{00}(t) + \lambda P_{10}(t)$

since $P_{00}(t) + P_{10}(t) = 1 \Rightarrow P_{10}(t) = 1 - P_{00}(t)$, 解 ODE.

2. 长期比例 Long-run Proportion

Recall: Accessible $i \rightarrow j$

Communicate $i \leftrightarrow j$

Irreducible: only 1 communication class. (CTMC 不可约 $\Leftrightarrow$ 嵌入链不可约)

暂态/常返状态

定义首次返回时间:

$$\tau_{ii} := \inf\{t > 0 : X(t) = i, \exists s \in (0, t) \text{ 使 } X(s) \neq i \mid X(0) = i\}$$

- 暂态: $P(\tau_{ii} < \infty) < 1$
- 常返: $P(\tau_{ii} < \infty) = 1$
 - 正常返: $E[\tau_{ii}] < \infty$
 - 带常返: $E[\tau_{ii}] = \infty$

CTMC 是 Transient / Recurrent $\Leftrightarrow$ Embedded Chain 是 ...

正/零常返不等价

这些都是类性质。本课程主要研究非爆炸 CTMC: 从任何初始状态出发, 在任意有限时间区间内, 几乎必然只能跳跃有限多次。

对于不可约 CTMC, 状态 i 的长期时间比例:

$$\pi_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E\left[\int_0^t 1_{\{X(s)=i\}} ds\right]$$

$$\pi_i = \frac{E[\text{每个周期的时间}]}{E[\tau_{ii}]} = \frac{1/v_i}{E[\tau_{ii}]}$$

不可约 CTMC Positive Recurrent $\Leftrightarrow$ every $\pi_i > 0$.

finite-state 不可约 CTMC $\Rightarrow$ Positive Recurrent.

如何计算 π (稳态-状态的时间比例).

① Limiting Probability

$$\pi_i = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t).$$

② Stationary Distribution

$$\pi \text{ 是平稳分布 if } \sum_j \pi_j = 1 \quad \pi Q = 0$$

存在平稳分布 $\Rightarrow$ Positive Recurrent.

③ Embedded Chain.

如果嵌入链正常返, π^d 为嵌入链的 stationary distribution. ($\pi^d J = \pi^d$)

$$\pi_i = \frac{\pi_i^d / v_i}{\sum_j \pi_j^d / v_j}$$

④ Time Reversibility

若嵌入链时间可逆且正常返, 则

$$\pi_i^d J_{ij} = \pi_j^d J_{ji} \Rightarrow \frac{\pi_i^d}{v_i} v_i J_{ij} = \frac{\pi_j^d}{v_j} v_j J_{ji}$$

$$\Rightarrow \pi_i Q_{ij} = \pi_j Q_{ji} \quad \& \quad \sum_i \pi_i = 1$$

排队模型

- ① M/M/1: 到达 Poisson (rate λ),
服务 Exponential (rate μ),
1 个服务器.

$$\pi_n = \pi_0 \prod_{i=1}^n \frac{\lambda}{\mu} = \pi_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = (1-\rho) \rho^n$$

$\Rightarrow$ 长期看 $n+1 \sim \text{Geo}\left(\frac{\mu-\lambda}{\mu}\right)$

- ② M/M/ ∞ .

$$\pi_n = \pi_0 \prod_{i=1}^n \frac{\lambda}{\mu} = \pi_0 \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}$$

$$\text{Let } \rho = \frac{\lambda}{\mu}, \quad \pi_n = e^{-\rho} \frac{\rho^n}{n!}$$

$\Rightarrow$ 长期来看, 系统中顾客数 $\sim$ Poisson (ρ)

Birth-Death Processes

$$\lambda_{n-1} \pi_{n-1} = \mu_n \pi_n \Rightarrow \pi_n = \pi_0 \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}$$

⑤ Truncated CTMC.

若可通 CTMC 的 stationary 是 $\{\pi_i\}$. 截断到子集 A (保持不可约) $\Rightarrow$ 截断链依然可约. 且

$$\pi_i^A = \frac{\pi_i}{\sum_{i \in A} \pi_i}$$

3. Performance Analysis

• Ergodic Theorem (SLAW for CTMC)

如果一个 CTMC 不可约, 连续, f 有界. $\text{Prob} \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(X(s)) ds = \sum_{i \in E} \pi_i f(i) \right) = 1$.

- $f(i) = i \rightarrow$ 长期平均系统中客户数
- $f(i) = 1_{i>0} \rightarrow$ 服务器利用率 ρ
- $f(i) = 1_{i=j} \rightarrow$ 在状态 j 的长期比例

• PASTA: Poisson Arrivals See Time Averages

对于任意 state s : long run fraction of arrivals that see s = long run fraction of time system is in s

$$\Leftrightarrow S = \pi_s.$$

• Little Law

对于一个稳定系统: $L = \lambda \cdot W$

L : 长期平均系统客户数. (服务 + 排队)

λ : 长期平均到达率. (单位时间进入的客户数)

W : 长期平均每个用户在系统中花的时间 (等待 + 服务).

4. Queueing Network

Burke Theorem: 对于稳定下的 M/M/1 队列. (arrive time rate λ , service time rate μ , s 个 server)

如果 $\lambda < s\mu \Rightarrow$ 离开过程 rate λ Poisson.

例: 顾客以 λ 到达第 1 个服务台 (1 个服务员). 服务时间 rate μ_1 的 exponential; 完成服务后, 进入第 2 个服务台 (1 个服务员), rate μ_2 Exp.

$$\rho_1 = \frac{\lambda}{\mu_1} \quad \rho_2 = \frac{\lambda}{\mu_2}$$

$$P(X_1 = m) = (1 - \rho_1) \rho_1^m \Rightarrow \pi_{m,n} = (1 - \rho_1)(1 - \rho_2) \rho_1^m \rho_2^n$$

$$P(X_2 = n) = (1 - \rho_2) \rho_2^n$$